Signal Processing Applications

Ayrık Zamanlı Filtreleme

Laboratuvar 4

Süzgeçlerin Temelleri

DZD Sistem

$$A\cos(\omega_0 n+\theta) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow \left|H(e^{j\omega_o})\right| A\cos(\omega_o n+\theta+\arg\left[H(e^{j\omega_o})\right])$$

- Herhangi *x(n)* için $x(n)=\sum_k A_k\cos(\omega_k n+\theta_k)$ olduğundan
- Sistemin Son Durum Cevabı

$$y_{ss}(n)=\sum_k \left|H(e^{j\omega_k})\right| A\cos(\omega_k n+\theta+\arg\left[H(e^{j\omega_k})\right])$$

Süzgeçlerin Temelleri

DZD Sistem

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)$$

- $z = e^{j\omega}$ olduğunda

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- Ya da

$$\left|Y(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{j\omega})\right|\left|H(e^{j\omega})\right|$$
$$\arg\left[Y(e^{j\omega})\right] = \arg\left[X(e^{j\omega})\right] + \arg\left[H(e^{j\omega})\right]$$

- $|H(z)|$ ‘yi düzenleyerek giriş işaretinin istediğimiz frekanslarını güçlendirip bastırabiliriz.

Frekans Seçici Süzgeçler

– IIR ve FIR süzgeçler

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}} \qquad N \geq M$$

- A(z) = 1 ise FIR, değilse IIR süzgeç
- IIR
  - Avantajları: Az sayıda katsayı, fark denklemi şeklinde tasarım
  - Dezavantajları: Kararlılık olmayabilir, Lineer olmayan faz.
- FIR
  - Avantajları: Her zaman kararlı, lineer faz
  - Dezavantajları: Çok sayıda katsayı, tekrarsız tasarım

Frekans Seçici Süzgeçler

– IIR ve FIR süzgeçler

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}} \qquad N \geq M$$

- $A(z) = 1$ ise FIR, değilse IIR süzgeç
- IIR
  - Avantajları: Az sayıda katsayı, fark denklemi şeklinde tasarım
  - Dezavantajları: Kararlılık olmayabilir, Lineer olmayan faz.
- FIR
  - Avantajları: Her zaman kararlı, lineer faz
  - Dezavantajları: Çok sayıda katsayı, tekrarsız tasarım

Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

- FFT metodu : *B(z)* ve *A(z)* katsayılarının L ≥ max(M, N) noktalı FFT leri yardımıyla *B(k)* ve *A(k)* ardından *H(k)*

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N-1} b_k z^{-k}} \qquad N \geq M$$

- Geometrik yaklaşım: Transfer fonksiyonunun kutup ve sıfırları yerleri yardımıyla

$$H(z) = K \frac{\prod_k (z - z_k)}{\prod_k (z - p_k)}$$

Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

- Örnek:

$$H(z) = K\frac{z^2 - 2s\cos(\phi)z - s^2}{z^2 - 2r\cos(\theta)z - p^2}$$

$$= K\frac{[z - se^{j\phi}][z - se^{-j\phi}]}{[z - re^{j\theta}][z - re^{-j\theta}]}$$

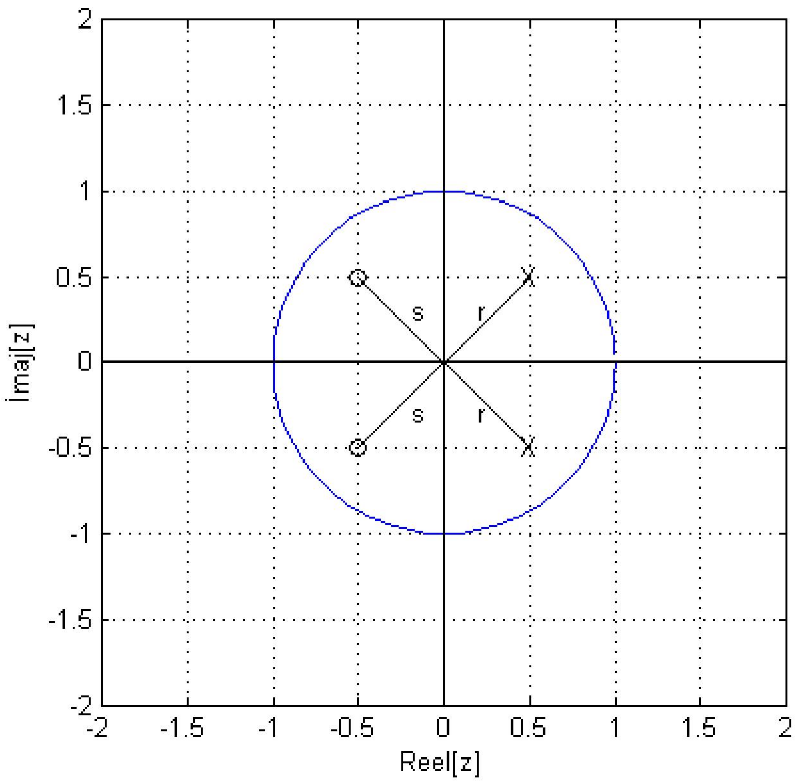
$$z = e^{j\omega_o} \rightarrow \qquad H(e^{j\omega_k}) = K\frac{\prod_l (e^{j\omega_k} - z_l)}{\prod_l (e^{j\omega_k} - p_l)}$$

$$= K\frac{\prod_l \vec{Z}_l(\omega_k)}{\prod_l \vec{P}_l(\omega_k)}$$

Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

- Örnek:



Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

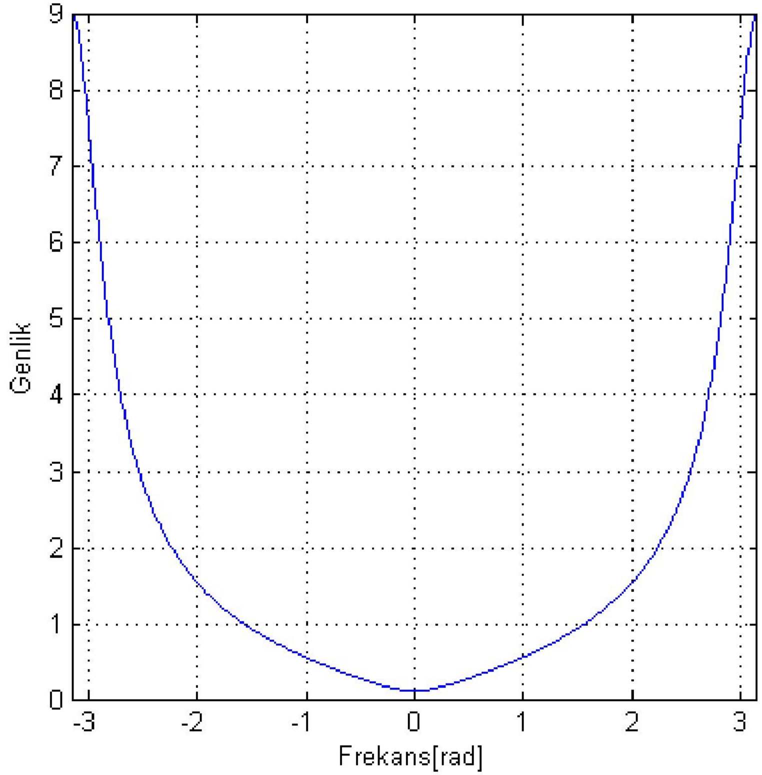
- Örnek 2:

$$H(z) = \frac{z - 0.8}{z + 0.8}$$

$$\left|H(e^{j0})\right| = \frac{0.2}{1.8} = \frac{1}{9}$$

$$\left|H(e^{j\pi})\right| = \frac{1.8}{0.2} = 9$$

$$\left|H(e^{j\pi/2})\right| = \frac{\sqrt{1.64}}{\sqrt{1.64}} = 1$$

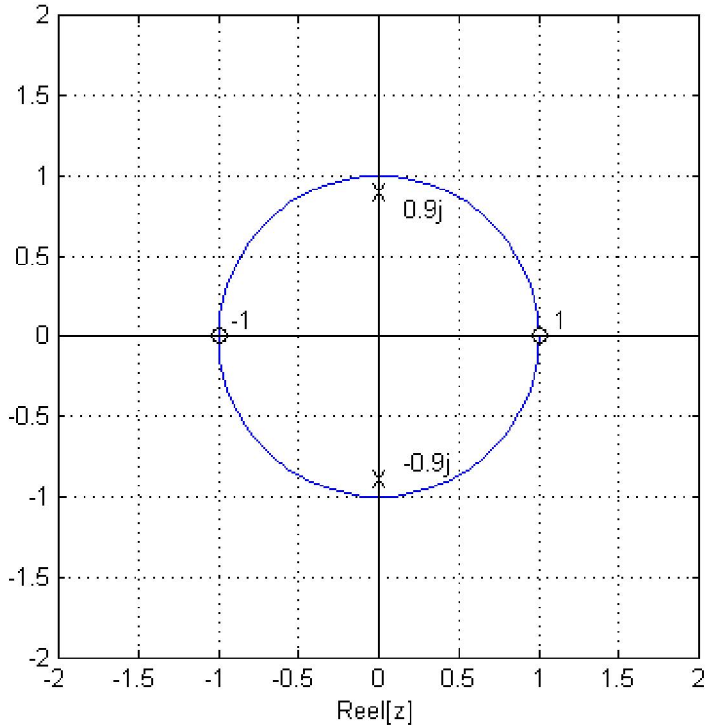


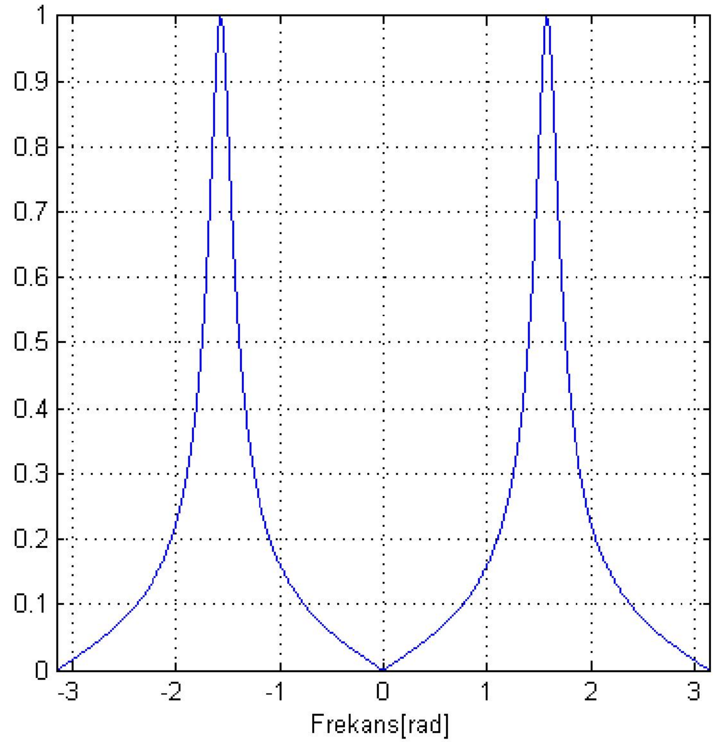
Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

- <u>Örnek 3:</u>

$$H(z) = 0.095\,\frac{z^2 - 1}{z^2 + 0.81}$$





Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

- Bir filtrenin kararlılığını kutupları belirler, bütün kutuplar birim çemberin içinde olmalıdır.
- Sıfırlar frekans cevabında vadi şekline neden olur (birim çember üstünde ise vadi sıfıra gider). Kutuplar ise zirve şekline (kutup eğer birim çemberde ise tepe $\rightarrow \infty$). Bu davranışlar kutup ya da sıfıra karşılık gelen açısal frekanslarda oluşur.
- Bu bilgiler yardımıyla, kutup ve sıfırlar doğru yerleştirilerek istenilen türde filtreler dizayn etmek mümkündür.

Frekans Seçici Süzgeçler

– Yarım Güç ya da -3dB

- Yarım Güç Frekansı (ω_{hp}) bant geçiren filtre için

$$\frac{\left|H(e^{j\omega_{hp}})\right|^2}{\left|H(e^{j\omega 0})\right|^2} = \frac{1}{2}$$

- Logaritmik eksende düşünürsek

$$\begin{aligned}10\log_{10}\left|H(e^{j\omega_{hp}})\right|^2 &= 10\log_{10}\left|H(e^{j0})\right|^2 - 10\log_{10}(2)\\ &= 20\log_{10}\left|H(e^{j0})\right| - 3.0103\,dB\end{aligned}$$

Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

- Örnek 4:
  - $\pi/2$ merkezli band geçiren
  - $\pi/40$ band genişlikli
  - Zirve noktası birim genlikli
  - 0 ve π de frekans bastıran
- Çözüm:
  - $\pi/2$ merkezinde tepe için kutuplar $p_{1,2} = \pm re^{j\pi/2}$
  - 0 ve π de bastırmak için sıfırlar $z_{1,2} = \pm 1$
  - r değeri Bant genişliğini belirler

$$BW \approx 2d = 2\sqrt{2(1-r)^2 - (1-r)^2} = 2(1-r) = \pi / 40$$

$$r \approx 0.961$$

Frekans Seçici Süzgeçler

– Frekans Cevabının Hesabı

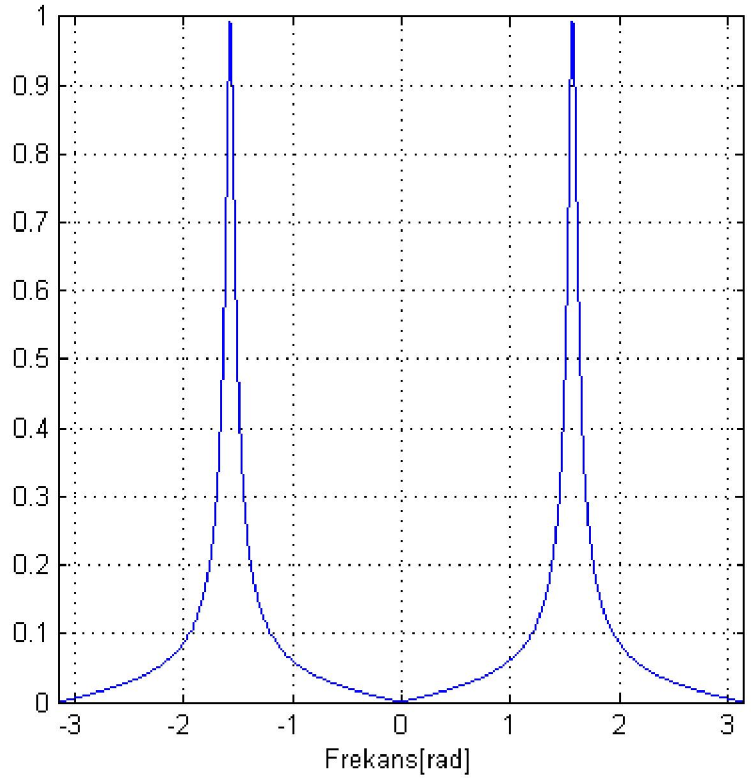
- Çözüm:

$$H(z) = K\frac{(z-1)(z+1)}{(z-0.961e^{j\pi/2})(z-0.961e^{-j\pi/2})}$$

$$= K\frac{z^2-1}{z^2+0.9235}$$

$$H(e^{j\pi/2}) = 1 = K\frac{2}{0.076}$$

$$K = 0.038$$



Frekans Seçici Süzgeçler

– Süzgeçlerin Kararlılığı

$$H(z)=\frac{N(z)}{(z-re^{j\theta})(z-re^{-j\theta})}$$

$$=\frac{A}{(z-re^{j\theta})}+\frac{A^{*}}{(z-re^{-j\theta})}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2r^{n}\left|A\right|\cos(\theta n+\phi)z^{-n}$$

$$h(n)=\sum_{n=0}^{\infty}2r^{n}\left|A\right|\cos(\theta n+\phi) \qquad ,n\geq 0$$

Frekans Seçici Süzgeçler

– Süzgeçlerin Kararlılığı

- Hep geçiren süzgeç

$$H_a(z) = K\frac{z-\frac{1}{r}}{z-r}$$

- Kararsız bir süzgeç $H_u(z)$ böylelikle kararlı hale getirilebilir

$$H(z) = H_u(z)H_a(z)$$