İstanbul İktisat Dergisi - Istanbul Journal of Economics
73, 2023/1, s. 55-81
ISSN: 2602-4152
E-ISSN: 2602-3954

ARAŞTIRMA MAKALESİ / RESEARCH ARTICLE

BIST100 Bankacılık Sektöründeki Bağımlılığın Asma Kopula ile İncelenmesi

Dependence Analysis of the ISE100 Banking Sector Using Vine Copula

Bükre YILDIRIM KÜLEKCİ[1,2], Gülden POYRAZ[3], İsmail GÜR[4], Ozan EVKAYA[5]

ÖZ

Son yıllarda sıklıkla gözlemlenen finansal piyasalar arasındaki bağımlılık ve zamana bağlı görülen değişim, modelleme ve fiyatlama açısından önem taşımaktadır. Bu çalışmada, BIST100'de işlem gören bankacılık sektörüne ait hisselerin arasındaki bağımlılık yapısının, zaman serileri ve kurallı asma (R-Vine) kopula modeli ile incelenmesi amaçlanmaktadır. Bankacılık hisselerinden eşit ağırlıklandırılarak oluşturulan portföy için, riske maruz değer (VaR) ve beklenen kayıp (ES) risk ölçütleri hesaplanmış ve geriye dönük yöntemlerle test edilmiştir. Türkiye bankacılık hisseleri özelinde yapılan bu çalışmada, GARCH ve kurallı asma kopula modellerinin birlikte uygulanmasının, geleneksel GARCH tabanlı yaklaşımlara kıyasla VaR ve ES risk ölçütü tahminlerini iyileştirdiğine dair bulgular elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Asma kopula, Finansal piyasalar, Risk ölçütleri
JEL Sınıflaması: G32, C32, C58

ABSTRACT

The frequently observed time-varying trends and dependence in recent years within financial markets have been essential for modeling and pricing. This study aims to analyze the dependence structure of banking sector stocks traded on the ISE100 index using time series and regular vine (R-vine) copula models. The study calculates the risk measures of value-at-risk (VaR) and expected shortfall (ES) and tests with backtesting methods for the portfolio that are constructed by equally weighting the banking stocks. This study's findings on banking stocks specifically indicate that the application of the R-vine copula combined with the generalized auto-regressive conditional heteroskedasticity (GARCH) model improved the VaR and ES estimates compared to traditional GARCH-based approaches..

Keywords: Vine copula, Financial market, Risk measures
JEL Classification: G32, C32, C58

DOI: 10.26650/ISTJECON2022-1229039

[1]Kaiserslautern Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Kaiserslautern, Almanya

[2]Dr., Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Uygulamalı Matematik Enstitüsü, Ankara, Türkiye

[3]Dr., Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi, Dış Ticaret Bölümü, Balıkesir, Türkiye

[4]Dr. Öğrencisi, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, Ankara, Türkiye

[5]Dr, Edinburgh, Edinburgh Üniversitesi, Matematik Bölümü, Edinburgh, İngiltere

ORCID: B.Y.K. 0000-0002-1246-9549;
G.P. 0000-0002-8324-6270;
İ.G. 0000-0001-7014-4606;
O.E. 0000-0002-5076-8144

Corresponding author:
Bükre YILDIRIM KÜLEKCİ,
Kaiserslautern Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, Kaiserslautern, Almanya
E-mail: bukre@metu.edu.tr

Submitted: 17.01.2023
Revision Requested: 13.04.2023
Last Revision Received: 26.04.2023
Accepted: 08.05.2023

Citation: Yildirim Kulekci, B., Poyraz, G., Gur, I., & Evkaya, O. (2023). BIST100 bankacılık sektöründeki bağımlılığın asma kopula ile incelenmesi. *İstanbul İktisat Dergisi - Istanbul Journal of Economics, 73*(1), 55-81. https://doi.org/10.26650/ISTJECON2022-1229039

This work is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License

EXTENDED ABSTRACT

Banks operating in Türkiye and traded in the ISE100 banking sector can be classified into three subsections: State banks owned by the country, private banks established by local holdings, and foreign banks that carry out their oversea activities in the country. Although they have different purposes, they are mostly affected by the same events at the same time. Each element in the banking system, especially banks themselves, cannot act individually and are affected alltogether by current economic and political factors. Therefore, one cannot expect these banking stocks that are traded in the stock market to behave independently. In addition to this, the decisions regulators and bank supervisors make regarding certain economic circumstances may also cause some simultaneous effects. Historically, the entire banking sector has been seen to contract and expand in some cases. Each stock price change can cause another related stock price to increase or decrease. In particular, sectors where a strong dependence exists, such as banking experience these co-movements more intensely.

Given the capital importance the banking sector holds in the Turkish economy, investigating the interdependence of these assets can help one better interpret these stocks both in regard to individual behaviors as well as to an integrated market setup. One can extract valuable information for this purpose using the flexibility of the vine copula approach that has been added to commonly used time series models. The underlying motivation for favoring the vine copula model over the high-dimensional copula model is to be able to consider the multivariate dependence within an unconfined approach. Due to high-dimensional copulas presenting a computational challenge, vines are more comprehensive and flexible in examining the dependency risk dynamics of portfolios under high-risk market conditions.

In this respect, the contributions of this study are twofold: First, it models the time-varying dependence structure of the 11 banking sector stocks that were traded on the ISE100 from 1/3/2018 to 9/222022, by integrating a combined generalized auto-regressive conditional heteroskedasticity (GARCH) and regular

vine (R-vine) copula model. Second, the study estimates the value-at-risk (VaR) and expected shortfall (ES) risk measures of the 11-dimensional equally-weighted portfolio using a 250-day rolling window approach based on this dependence structure. An equally-weighted portfolio approach allows one to track the dependence structure, as well as to observe and measure the changes in the portfolio based on differences in dependence. This study compares the results of the proposed model with the traditional GARCH-based portfolio risk measures, providing evidence that the proposed R-vine copula-based GARCH (VGARCH) model improves the price estimations. With regard to the calculated risk measures (VaR and ES), the VGARCH model with Student's t innovations outperforms the classical GARCH model's results at a 95% significance level.

The results show that, while banks with a high market capitalization generally exhibit a symmetrical tail dependence (YKBNK, AKBNK, and GARAN stock listings), banks with relatively small market capitalization tend to have lower-tail dependence (ALBRK, SKBNK, TSKB, and ICBCT stock listings). The tree structure of the R-vine copula model indicates the ISCTR and VAKBN stocks to be the most interconnected central nodes. This indicates that these may be the two most important financial institutions that need to be focused on in order to achieve a faster recovery in times of financial stress. Based on the application, the survival Gumbel copula, which appears in maximum numbers, clearly also plays an important role in the dependency structure of the banking sector stocks. The prevalence of the survival Gumbel copula in the banking sector can be interpreted as a sign of the high probability that unfavorable events become extreme and easily transform into systemic risk. These results provide important implications regarding financial institutions' economic decisions, capital regulations, the goverentment's arrangement of legislation and regulations, supervisory agencies, and investors' risk-management decisions in the financial market.

1. Giriş

Subprime kredi krizi olarak başlayıp globalleşen 2007-2009 finansal krizi ve finansal piyasalardaki artan volatilite ışığında, risk yönetimi finans kurumlar ve düzenleyiciler açısından kritik hale gelmiştir (Brechmann ve Czado, 2013). Özellikle, Bear Stearns ve Lehman Brothers'ın başarısızlıklarının ardından, makro-ihtiyati düzenleme, bir finansal kurumun kırılganlığının diğer finansal kurumların performansını nasıl etkileyeceğinin değerlendirilmesini zorunlu kılmıştır. Bu nedenle, politika yapıcılar için riski doğru bir şekilde değerlendirmek gittikçe daha fazla önem taşımaktadır. Mevcut finansal düzenlemeler, Basel sermaye yeterliliği yoluyla riski yönetmeye çalışsa da bu düzenlemeler doğası gereği mikro ihtiyatlıdır ve sadece her bir kurumun bireysel riskini sınırlamaya çalışır (Pourkhanali, Kim, Tafakori ve Fard, 2016). Standart risk ölçüm araçları, örneğin riske maruz değer (VaR), bu riskin doğasını ve bir temerrüdün diğer kurumlar üzerinde sahip olabileceği potansiyel riskleri dikkate almaz (Reboredo ve Ugolini, 2016).

Bu modellerin önemli bir sorunu, farklı varlıklar arasındaki bağımlılığın nasıl ele alındığı ile ilgilidir. Finansal literatürde, rassal değişkenler arasındaki bağımlılığı tanımlamak için genelde korelasyon değeri kullanılır. Fakat korelasyon sadece eliptik dünyada, örneğin çok değişkenli normal veya Student's t dağılımlarında iyi bir ölçüdür (Heinen ve Valdesogo, 2010). Ancak bu yaklaşım, getiriler arasında doğrusal olmayan bir ilişki söz konusu olduğunda, özellikle de ekstrem olayların gözlendiği durumlarda ortak riski olduğundan daha düşük tahmin etmektedir. Korelasyon temelli modellerin bu sınırlamaları nedeniyle, literatürde finansal zaman serilerinin modellemesi kopula yöntemi ile genişletilmektedir. Kopulalar, korelasyon yaklaşımına kıyasla daha fazla esneklik sundukları için avantajları da çok yönlüdür. Kopulalar rassal değişkenlere ait marjinal dağılım ve bağımlılığı ayrı ayrı modelleme imkânı verir. Buna ek olarak, sadece doğrusal değil, doğrusal olmayan ilişkileri de yakalayabilir ve ortak hareketin hem derecesini hem de yapısını tespit eder. Aynı zamanda, yatırımcılara ait portföy risklerinin hesaplanmasında önemli rol oynayan kuyruk bağımlılığına ve asimetrik bağımlılığa da izin verirler (Patton, 2013; Nelsen, 2007). Kuyruk bağımlılık yapılarının ölçülmesi, risk yönetimi için de

oldukça önemlidir (Mensah ve Adam, 2020). Özellikle, finansal riskler ölçülürken alt kuyruk bağımlılık riskinin dikkate alınması gerekir.

Kopulalar, ilk olarak kredi türev ürünlerinin fiyatlandırılmasında kullanılmış olsa da önemli bir diğer uygulama alanları da risk yönetimidir (Zhang, 2015). Risk yönetiminde, farklı risk faktörlerinin -örneğin bir portföydeki hisse senetleri- etkileşiminin anlaşılabilmesi karar vericiler açısından oldukça önemlidir (Dißmann, 2010). Çok boyutlu eliptik ve Arşimet kopulaları tüm değişkenleri aralarında aynı tip bağımlılık yapısına sahip olacak şekilde modeller. Bu nedenle, yüksek boyutlu verilerde daha çok asma kopula yaklaşımı tercih edilmektedir. Joe (1996) asma kopulaları önerirken, iki boyutlu kopulaları daha yüksek boyutlara genişletmenin esnek bir yolunu sunmak için farklı çift kopulaları yapı taşı olarak kullanmıştır. Daha sonra, Bedford ve Cooke (2001, 2002) ve Kurowicka ve Cooke (2006) yaptıkları çalışmalarda, asma kopula yapılarının genel çerçevesini oluşturmuşlardır. Bu modeller literatürde "pair-copulas" olarak da adlandırılır ve çok değişkenli esnek grafiksel modellerin kurulmasına olanak sağlar. Finansal risklerin modellemesi amacıyla genişletilen asma kopula modellerinin en avantajlı yanlarından biri, karşılıklı bağımlılığı modellemek için kullanılan dağılımların seçimindeki esnekliktir (Heinen ve Valdesogo, 2010). Asma kopulalar ayrıca Pearson, Spearman ve Kendall gibi korelasyon ölçütlerinin kısıtlayıcı doğalarının üstesinden gelebildiği gibi finansal verilerle uyumlu çalışma konusunda da alternatif çok değişkenli kopula modellerinden daha iyi performans göstermektedir (Hernandez, 2015; Min ve Czado, 2010).

Türkiye özelinde, 2010 yılından sonra para piyasalarından kaynaklanan yayılmaların önemli ölçüde azalması, TCMB'nin finansal istikrar odaklı bir politika çerçevesine geçişini yansıtmaktadır. Ancak, hisse senedi piyasalarının yayılmalarının birincil kaynağı olmaya devam etmesi, bu piyasalardaki stres gelişmelerinin politika yapıcılar tarafından yakından takip edilmesini gerektirir. Hisse senetlerine özgü stresi ve bu stresin diğer alt piyasalar üzerindeki etkisini dikkate almak, riski kontrol altına almaya yardımcı olabilir (Çamlıca, Güneş ve Özen, 2017). Hisse senedi piyasasının yüksek ağırlığının bankacılık sektöründen oluştuğu dikkate alındığında, bu sektör içindeki bağımlılık yapısının incelenmesi önem arz etmektedir. Bu

doğrultuda, çalışmanın katkısı iki yönlüdür: İlk olarak, BIST100'de işlem gören bankacılık sektörüne ait hisse senetlerinin bağımlılık yapıları, kurallı asma (R-Vine) kopula modeliyle incelenmektedir. Bu yöntem aracılığıyla hangi hisse senetlerinin birbirine daha fazla bağımlı olduğunu ve öncü hisse senetlerini belirlemek mümkündür. İkinci olarak, finansal piyasalarda piyasa analistleri tarafından daha yüksek boyutlu portföyler oluşturmak istenebilir. Bu portföyler için kopula tabanlı çok değişkenli bir modellemenin uygulanması esnek bir model sağlanması açısından avantajlı olacaktır. Bu doğrultuda ve ilgili bağımlılık yapısı temelinde, bankacılık sektörüne ait 11 hisse senedinden oluşan eşit ağırlıklı bir portföy ele alınmış, VaR ve ES risk ölçütü değerleri kurallı asma kopulalar üzerinden yola çıkarak, daha güvenilir bilgi edinmek için hesaplanmıştır. Böylece önerilen yöntemin finansal stres dönemlerinde yatırımcılara olası risklerden (kayıplardan) kaçınılması için daha güvenilir bilgiler sağlanması ve sistematik olarak önemli finansal kurumları ve yeterli sermaye gereksinimlerini belirlemek için de kullanılabilmesi amaçlanmaktadır.

Çalışmanın geri kalanı şu şekilde organize edilmiştir: Bölüm 2'de asma kopula yöntemine dair literatür incelemesi ele alınmaktadır. Bölüm 3'de GARCH tabanlı asma kopula yöntemi tanıtılmaktadır. Bölüm 4'de veriler ve analizden elde edilen sonuçlar tartışılırken, Bölüm 5'de elde edilen sonuç ve öneriler sunulmaktadır.

2. Literatür

Kopula modellerinin, artan globalleşme ve bağımlılık sebebiyle farklı alanlarda uygulanmasında önemli bir artış gözlemlenmektedir. Kopulalar, özellikle varlık getirileri, risk yönetimi ve varlık ve türev fiyatlandırması arasındaki bağımlılıkların modellenmesinde kullanılmıştır. Örneğin, Li (2000) kopulayı bazı kredi türev ürünlerinin değerlenmesinde ilk kez uygulamıştır, söz konusu türevler Wall Street'i öldüren formül olarak da bilinmektedir. Rockinger ve Jondeau (2001), kopula-GARCH yaklaşımını kullanarak beş büyük uluslararası hisse senedi endeksinin bağımlılığını modellemişlerdir. Zeevi ve Mashal (2002), hisse senedi getirileri arasında asimetrik uç değer bağımlılığını rapor ederken, Patton (2008) finansal piyasalardaki şokların asimetrik etkileri nedeniyle, eliptik kopula ailelerinin finansal verileri yeterince iyi açıklayamadığını ileri sürmüştür.

Diğer taraftan asma kopulalar asimetrik bağımlılığı da modele dahil ederek çok boyutlu verilerde kopula fonksiyonlarının veriyi açıklama gücünü geliştirmektedir (Zhang, Yan ve Tsopanakis, 2018). Joe, Cooke ve Kurowicka (2010), finansal veriler için, yüksek boyutlu asimetrik özellikleri yakalamada kurallı asma kopulanın daha iyi bir model olduğunu ortaya koymaktadır.

Allen, Ashraf, McAleer, Powell ve Singh (2013), Dow Jones endeksinden bir hisse senedi örnekleminin bağımlılığını modellemede kurallı asma kopulayı kullanarak, korelasyonunun farklı ekonomik ortamlarda nasıl değiştiğini incelemişlerdir. İlgili ampirik sonuçlar, ele alınan dönemde hisse senetlerinin bağımlılık yapısını modellemede daha esnek bir yöntem kullanılmasının ve Student's t kopulasının avantajlarını göstermişlerdir. Dißmann, Brechmann, Czado ve Kurowicka (2013) kurallı asma kopula tahmini için bir algoritma önermiş ve uluslararası finansal endekslerden oluşan 16 boyutlu bir veri üzerinde uygulamışlardır. Asma kopula yönteminin yaygın olarak kullanıldığı diğer bir alan da portföy yönetimidir. Brechmann ve Czado (2013) yürüttükleri çalışmada portföyün bağımlılık yapısını analiz etmede asma kopulalarının kullanımını ve yararlılığını vurgulamış, Geidosch ve Fischer (2016) ise asma kopulaların, geleneksel çok boyutlu kopulalara göre avantajlarını göstermişlerdir. Maugis ve Guegan (2010), asma kopula yöntemini geleneksel GARCH modelleri ile karşılaştırmış ve önerilen yöntemin portföy VaR tahminlerini iyileştirdiği sonucuna varmışlardır. İlgili riski ölçmeyi ve farklı finansal enstrümanlar içeren portföylerin optimal ağırlıklarını bulmayı amaçlayan Pastpipatkul, Yamaka ve Sriboonchitta (2018) her bir finansal araç çiftinin bağımlılık yapısını, kurallı asma kopulaların iki özel türü olan C ve D asma kopula yöntemiyle çalışmışlardır. Buna ek olarak, oluşturulan portföy için VaR ve ES değerleri de elde edilmiştir.

Asma kopula yöntemi aracılığıyla uluslararası hisse senedi piyasaları arasında bağımlılık yapısını inceleyen geniş bir literatür söz konusu iken, bu konu ile ilgili Türkiye özelinde yapılmış çalışmalar sınırlıdır. Türk finans sektörüne ait hisse senedi piyasalarına ilişkin araştırmalar genellikle korelasyon ve koşullu korelasyon doğrultusundadır. Binici, Köksal ve Orman (2013) borsada işlem gören 17 bankanın karşılıklı bağımlılıklarını hisse senedi getiri korelasyonları ile ölçmekte ve

bu korelasyonları sistemik riskin bir göstergesi olarak kullanmaktadır. Talaslı (2013), finansal kurumlara ait hisse senedi getiri ve bilanço verilerini kullanarak, sistemik beklenen kayıp (SES) ölçüm metodunun Türkiye için uygulanabilirliğini araştırmış, SES ölçüm yaklaşımının potansiyel risklerin ölçülmesinde güçlü bir alternatif yöntem olduğu sonucuna ulaşmıştır. Şengül ve Yılmaz (2019), koşullu riske maruz değer (CoVaR) ve marjinal beklenen kayıp (MES) ölçüm yöntemlerini kullanarak, Türk bankacılık sektörünün sistemik riskler üzerindeki etkilerine odaklanmıştır.

Bu çalışmada kullanılan yönteme en yakın araştırma örneği Özgür ve Sarıkovanlık (2021)'ın BIST30'da işlem gören 12 hisse senedinin bağımlılık yapısını kurallı asma kopula modeli ile analiz ettikleri çalışmadır. Eşit ağırlıklı bir portföyün VaR ve ES tahminlerini elde etmek amacıyla çok değişkenli Normal, Student's t dağılımları ile kurallı asma kopulaları karşılaştırmışlardır. İfade edildiği gibi, kurallı asma kopula odaklı bağımlılık yapısını ve ilgili risk ölçümlerini içeren çalışmalar konusunda ulusal literatürde önemli bir boşluk söz konusu olup konuyla ilgili bu boşluğun doldurulması çalışmanın temel amacını oluşturmaktadır. Yazarların bilgisi dahilinde, Türkiye bankacılık hisse senetleri odaklı bu çalışma, kurallı asma kopula metoduyla getirileri birbiriyle bağımlı bir hisse senedi portföyü için risk ölçütü hesaplamasında bulunan ilk araştırmadır.

3. Yöntem

Finansal verilerde normal dağılımdan farklı olarak çarpıklık, basıklık, birbirine bağımlılık gibi kendine has yapısal özellikler bulunmaktadır. Bu özelliklerin geleceğe yönelik yapılacak tahminlere yansıtılabilmesi için kullanılacak olan model önem taşımaktadır. Bu çalışmada gelecekte karşılaşılması muhtemel risklere de uyum sağlayabilecek olması nedeniyle, zaman serileri ve asma kopula modeli bir arada kullanılarak güvenilir risk ölçütü tahminleri elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Zaman serileri modeli yardımıyla verinin ortalaması, trendi ve volatilitesi gibi zamana bağlı değişen özellikleri modele dahil edilebilmektedir. Kurallı asma kopula modeli ise çok değişkenli verilerin arasındaki sistemik riske yol açabilen bağımlılık yapısının esnek bi şekilde modellenebilmesi için kullanılmıştır. Modelin

etkilerinin görülebilmesi için, geleceğe yönelik yapılan getiri tahminlerinden finansal araçlarda en sık kullanılan risk ölçütleri olan VaR ve ES hesaplanmıştır. Yapılan tahminlerin güvenilirliğinin test edilebilmesi için geriye dönük testlerden yararlanılmıştır.

Kopula fonksiyonu, zaman serisi modelinin standardize edilmiş artık değerlerine uygulanacağı için öncelikle tek değişkenli zaman serileri analizi yapılmalıdır (Zhang ve Singh, 2019). Finansal verideki hem zamana bağlı trend hem de sabit olmayan volatilitenin modellenebilmesi için ARMA(*p*,*q*)-GARCH(*m*,*n*) kullanılması belirlenmiştir. Veriye logaritmik getiri dönüşümü yapıldıktan sonra, otoregresif hareketli ortalama modeli, ARMA(*p*,*q*), ile aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedir.

$$r_t = c + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i r_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \tag{1}$$

Bu eşitlikte r_t t anındaki getiri, ε_t beyaz gürültü, c sabit, $a_i \neq 0$ ve $\beta_j \neq 0$ ise AR(*p*) ve MA(*q*) parametrelerini tanımlamaktadır. Ardışık bağlanımlı koşullu değişen varyans (ARCH) sürecinin genelleştirilmiş versiyonu olan otoregresif koşullu değişen varyans (GARCH) modeli

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \sigma_{t-j}^2 \tag{2}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada, $z_t, D\ (0,1)$ ile birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenleri, $w > 0$ sabit değişkeni, $a_i \geq 0$ ve $b_j \geq 0$ ise GARCH model parametrelerini tanımlamaktadır.

Artık rasgele değişkeni olan z_t'nin dağılımı, modellenen verinin özelliğini en iyi yansıtacak şekilde seçilebilir. Bu konuda literatürde yapılan çalışmalara bakıldığında, finansal veriler için standart normal (norm), Student's t (std), ve çarpık Student's t (sstd) dağılımlarının sıklıkla kullanıldığı görülmektedir.

Kopula fonksiyonu Sklar (1959) tarafından tanımlanmıştır ve *d* marjinal dağılımı birleştiren, çok değişkenli birleşik bir dağılım fonksiyonunu belirtir. $X_1, \dots, X_d$; marjinal dağılımları $F_1(x_1) = u_1, \dots, F_d(x_d) = u_d$ olan d adet rasgele değişkeni göstermektedir. Bu değişkenlerin ortak çok değişkenli dağılım fonksiyonu olan *F*, kopula fonksiyonu olarak *C* ile gösterilir ve $[0,1]^d \rightarrow [0,1]$ aralığında aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)\big) = C(u_1, \dots, u_d) \qquad (3)$$

Bağımlılık yapısına göre kopulalar temel olarak iki başlık altında toplanmaktadır: i) simetrik bağımlılık yapısına sahip eliptik kopulalar ve ii) asimetrik bağımlılık yapısına sahip Arşimet kopulalar. Çok değişkenli modeller için, artan veri boyutu ile Arşimet kopula modelleri karmaşık hale gelir ve kullanımı zorlaşır. Normal dağılım göstermeyen finansal veriler için daha uygun olmalarına rağmen parametre tahmini açısından problem yaratabilmektedirler. Çok boyutlu birleşik dağılımların karmaşıklığı, çift-kopula (PCC) olarak adlandırılan iki boyutlu kopulalar ile ifade edilebilir. İlk olarak Joe (1996) tarafından önerilen ve daha sonra Aas, Czado, Frigessi ve Bakken (2009) tarafından geliştirilen asma kopulalar, grafiksel olarak ağaç yapısında düzenlenebilen ve analiz edilebilen zengin bir çift-kopula çeşitliliği ile çok değişkenli bağımlılığı tanımlamak için esnek bir model sunar ve çoklu bağımlılıkların analizini kolaylaştırır.

Asma kopula V değişkeniyle ifade edilir ve birbirine bağlanan $j = 1, \dots, d-2$ ağaçtan oluşur. Ağaç *j*'nin kenarları $j+1$ ağacının düğümlerini oluşturur. Kurallı asma kopula ise j ağacındaki iki kenarın, $j+1$ ağacındaki bir kenarla ortak bir düğümü paylaşması özelliğiyle tanımlanır. Bu nedenle, tek bir optimal PCC sağlar. Kopula d boyutlu ise, $d-1$ ağaç için $d(d-1)/2$ adet çift kopula seçilir. İlk kök düğüm, seçilen bir değişkenin diğerleriyle olan bağımlılığını modeller. Buna bağlı olarak, ikinci kök düğüm, bağımlılığı başka bir seçilen değişkene göre modeller. Aynı yapı izlenerek, tüm çift-kopulalar seçilen değişkenlere göre koşullu olarak seçilir.

X rasgele değişkeninin d boyutlu olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = f_1(x_1) f_{2|1}(x_2|x_1) f_{3|1,2}(x_3|x_1, x_2) \dots f_{d|x_1,x_2,\dots,x_{d-1}}(x_d|x_1, x_2, \dots, x_{d-1}) \quad (4)$$

Burada, $f_i(x_i),\ i = 1,2, \dots, d$ marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını göstermektedir. İki değişken X_1 ve X_2'den oluşan $c_{1,2}$ çift-kopulasının açılımı

$$f_{1,2}(x_1, x_2) = c_{1,2}(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_1(x_1) f_2(x_2) \quad (5)$$

olarak gösterilir. Bununla bağlantılı olarak, koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu da

$$f_{2|1}(x_1) = c_{1,2}\big(F_1(x_1), F_2(x_2)\big) f_2(x_2) \quad (6)$$

olarak gösterilir.

Kurallı asma kopulalar tekil bir çözüme sahip değildir. Bu nedenle Bedford ve Cooke (2001) tarafından geliştirilen grafiksel yaklaşım, hangi modelin seçileceğine karar vermek için kullanılabilir. Tanım gereği, N düğümleri ve ε kenarları göstersin, böylece $N = N_1, \dots, N_{d-1}$ ve $\varepsilon \in E_1, \dots, E_{d-1}$ olarak yazılabilir. Koşullu düğümler ise $j(e)$ ve $k(e)$ olarak tanımlanır ve koşullandırma seti $D(e)$ olarak yazılır. Böylece, kurallı asma kopula için, aşağıda verilen çok değişkenli olasılık yoğunluk fönksiyonu elde edilir:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = \left[\prod_{k=1}^{d} f_k(x_k)\right] \times \left[\prod_{i=1}^{d-1} \prod_{e \in E_i} c_{j(e),k(e)|D(e)}\left(F_{j(e)|D(e)}\left(x_{j(e)}|x_{D(e)}\right), F_{k(e)|D(e)}\left(x_{k(e)}|x_{D(e)}\right)\right)\right] \quad (7)$$

Asma kopula için çok sayıda farklı iki değişkenli kopula modeli arasından en uygun olan seçilebilir. Eşitlik (8)'de verilen Kendall'ın τ ölçüsü ile R-Asma kopula ağaçlarının belirlenmesinde sıralı yöntem (en güçlü bağımlılıklar) kullanılmaktadır. Bu adımsal analiz, uygulama aşamasında hesaplama kolaylığı ve etkinlik sağlar.

$$\tau(x, y) = 4 \int_{o}^{1} \int_{0}^{1} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (8)$$

Akaike bilgi kriteri (AIC) ve Bayes bilgi kriteri (BIC), en iyi kopula modelini seçmek için kullanılan en yaygın istatistiklerdir ve aşağıdaki denklemler kullanılarak hesaplanır.

$$AIC = 2k - 2ln(L),$$

$$BIC = k\ ln(N) - 2ln(L) \quad (9)$$

Burada N ilgili örneklem büyüklüğünü, k toplam parametre sayısını ve son olarak L ise en büyük olabilirlik fonksiyonunun değerini ifade etmektedir.

Asma kopulaların belirlenme aşamaları: i) Asma ağaç yapısının seçimi, ii) her iki boyutlu veri seti için en uygun olan kopula ailesinin seçimi ve iii) kopula parametre tahminlerinin yapılmasını gerektirir. Seçilecek olan kopula aileleri, farklı bağımlılık modellerini temsil eder. Yaygın olarak kullanılan eliptik kopula ailesinde, Gauss ve Student t-kopulaları bulunmaktadır. Gauss kopulası simetriktir ve kuyruk bağımlılığı yoktur (Aloui, Aïssa ve Nguyen 2013), Student's-t kopulası ise seçilen parametre değerlerine bağlı olarak ekstrem simetrik kuyruk bağımlılığı veya tam bağımsızlık durumlarını kapsamaktadır. Arşimet kopula ailesi içinde Clayton, Gumbel, Frank ve Joe tek parametreli kopulalar için başlıca örneklerdendir. Gauss kopulasına benzer şekilde, Frank kopulası da herhangi bir kuyruk bağımlılığı göstermez. Öte yandan, Clayton kopulası alt kuyrukta üst kuyruğa göre daha fazla bağımlılık gösterirken, Gumbel kopulası üst kuyrukta alt kuyruğa göre daha fazla bağımlılık gösterir. Bu ailelerin bir kombinasyonu olarak, iki parametreli ve iki değişkenli kopula (BB) ailesi de üst ve alt kuyruk bağımlılığına izin vermektedir (Joe, 1997). Bu çalışmada ilgili modellerin kurulması için VineCopula R paketinden faydalanılmıştır (Nagler ve ark., 2022). Asma kopulalar ile ilgili daha fazla ayrıntı için Czado (2019) kaynak gösterilebilir.

Çalışmanın uygulama kısmında BIST100 bankacılık sektörünü temsil edecek olan portföy eşit ağırlıklar kullanılacak hesaplanmıştır. Portföyün t anındaki getiri oranı olan, R_t, d adet hisse için $R_t = \sum_{i=1}^{d} w_{i,t} r_{i,t}$ olarak hesaplanmaktadır. Burada, $w_{i,t}$ ve $r_{i,t}$ ve sırasıyla hissesinin anındaki portföydeki ağırlığını ve getirisini ifade etmektedir.

Finansal araçlarda bulunan riskin belirlenmesi için kullanılan en popüler risk ölçütü VaR'dir. Tutarlı bir risk ölçütü olmamasına rağmen, tek bir değer ile riski

ifade edebilmesi açısından ve düzenleyici kurumlar tarafından kullanılması önerildiği için literatürde ve sektörde tercih edilmektedir. Rasgele değişken X'in VaR ölçütü, α risk seviyesi ve dağılım fonksiyonu F ile şu şekilde ifade edilir,

$$VaR_\alpha(X) = F^{-1}(1-\alpha) \tag{10}$$

Tutarlı bir risk ölçütü olan ES ise, VaR seviyesinin aşıldığı koşuluyla beklenen risk miktarına yani dağılımın kuyruk kısmına odaklanır ve aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır,

$$ES_\alpha(X) = E(X|X \geq VaR_\alpha) \tag{11}$$

Hesaplanan VaR değerlerinin uygunluğunun ölçülmesi ve yorumlanabilmesi için Kupiec'in ihlal oranı testi (POF) ve Christoffersen'in bağımsızlık ve aralık tahmin testi (IND) kullanılmaktadır (Kupiec, 1995; Christoffersen, Hahn, & Inoue, 2001). POF testi, gerçekleşen ihlal sayısının test verisi uzunluğuna oranının risk ölçütünün hesaplandığı güven seviyesine eşit olması hipotezine dayanır. Gözlem sayısı N olan bir veride, n sayıdaki ihlal değişkeni (N, q) parametreleri ile Binom dağılım gösterir. Buradan yola çıkarak, beklenen ihlal sayısı n, $[(1-q)N]$, olarak tahmin edilmektedir,

$$LR_{POF} = 2\left[log\left(\left(\frac{n}{N}\right)^n\left(1-\frac{n}{N}\right)^{N-n}\right) - log\left((1-q)^n q^{N-n}\right)\right] \tag{12}$$

ve LR_{POF} test istatistiği χ_2^1 dağılımı göstermektedir.

IND testi veri setini, bir önceki ve bir sonraki verilerde ihlal olup olmamasına göre dört gruba ayırır. Her grupta n_{ij}, sayısında gözlem bulunmaktadır. Burada i bir önceki veride ihlal olup olmadığını ve j ise bir sonraki veride ihlal olup olmadığını $\{0,1\}$ değerleri ile gösterir. İhlal olasılıkları, π_i, $i = 0,1$, için

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}, \pi = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}} \tag{13}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Elde edilen en çok olabilirlik oranı,

$$LR_{IND} = -2\ ln\left[(1-\pi)^{(n_{00}+n_{10})}\pi^{(n_{01}+n_{11})}\right] + 2\ ln\left[(1-\pi_0)^{n_{00}}\pi_0^{n_{01}}(1-\pi_1)^{n_{10}}\pi_1^{n_{11}}\right] \quad (14)$$

χ_2^1 dağılımına uymaktadır.

ES risk ölçütünü test etmek için literatürde McNeil ve Frey (2000) tarafından geliştirilen aşkın miktara bağlı olan geriye dönük test kullanılmaktadır. İleriye dönük olarak tahmin edilen $\widehat{ES}_{\alpha,t}$ gerçekleşen getiri $r_{t,}$ ve koşullu volatilite $\hat{\sigma}_t$ kullanılarak aşağıdaki eşitlik aşkın miktarların beklenen değerini hesaplar.

$$E(s_t) = E\left(\frac{r_t - \widehat{ES}_{\alpha,t}}{\hat{\sigma}_t} | r_t > \widehat{VaR}_{\alpha,}{}^t\right) \quad (15)$$

Eğer kullanılan model uygun ise beklenen değerin, olması beklenir. Test istatistiği olarak elde edilir ve yorumlanır.

4. Uygulama

Bankaların hisse senedi fiyatlarından ve hareketlerinden elde edilen ileriye dönük bilgiler, sistemik riskin nasıl geliştiğini belirleme konusunda düzenleyici kurumlara yön verir bu tür riskleri kontrol altına almak için proaktif önlemler alma konusunda yardımcı olur. Birçok banka, portföy değerlemede kendi iç modellerinin bağımlılık yapısının kalibrasyonu için hisse senedi verilerine güvenmektedir. Buna ek olarak, hisse senedi getirileri temerrütleri tahmin etmede özsermaye ve kredi riski arasında bir bağlantı sağladığı için de önemli bir değişkendir (Xia, 2018). Bu sebeple çalışmada bankalara ait hisse senedi getiri serileri kullanmıştır. BIST Bankacılık (XBANK) endeksinden farklı olarak, ayrıntıları **Tablo 1**'de gösterilen, 11 adet bankacılık hissesinin 03.01.2018 ile 22.09.2022 tarihleri arasındaki günlük getiri değerleri incelenmiştir. Veriler, Refinitiv Eikon ve Investing veri tabanlarından derlenmiştir.

Uygulama bölümü, iki alt başlıkta özetlenmektedir. İlk bölümde, hisse senedi getirilerinin kurallı asma kopulalar ile incelenen bağımlılık yapısı analizi yer almaktadır. İkinci bölümde ise, çalışmada kullanılan getiri serilerinden oluşturulan,

kurallı asma kopula tabanlı dinamik bir portföy için VaR ve ES değerlerine göre portföy riski çıktıları ele alınmaktadır.

4.1. Kurallı Asma kopula ile Bağımlılık Modellemesi

Tablo 1'e bakıldığında, hisselerin çarpıklık ve basıklık katsayılarına göre normal dağılıma uygun olmadığı görülmektedir. Özellikle çok değişkenli normal dağılıma uygun olmayan seriler arasındaki bağımlılığın tespit edilmesinde, kopula yöntemi iyi bir alternatif sunmaktadır. İlk olarak çalışmada kullanılan getiri zaman serilerinin trend ve volatilitesini modellemek için finansal veriler için literatürde sıklıkla benimsenmiş olan ve etkinliği kanıtlanmış ARMA-GARCH kullanılmıştır (Zhang, Yan ve Tsopanakis, 2018). Model hata terimlerindeki otokorelasyon ve varyans değişimleri Ljung-Box ve ARCH testleriyle incelenmiş elde edilen p-değerlerine göre ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modeli uygun bulunmuştur. Artık değerler için tercih edilen dağılım, normallik varsayımı uygun olmayacağından, yüksek basıklık katsayısı ile ilişkilendirilen Student's t olarak seçilmiştir. Daha sonra, elde edilen artık değerler arasındaki ilişki, kurallı asma kopulalar ile modellenmiştir.

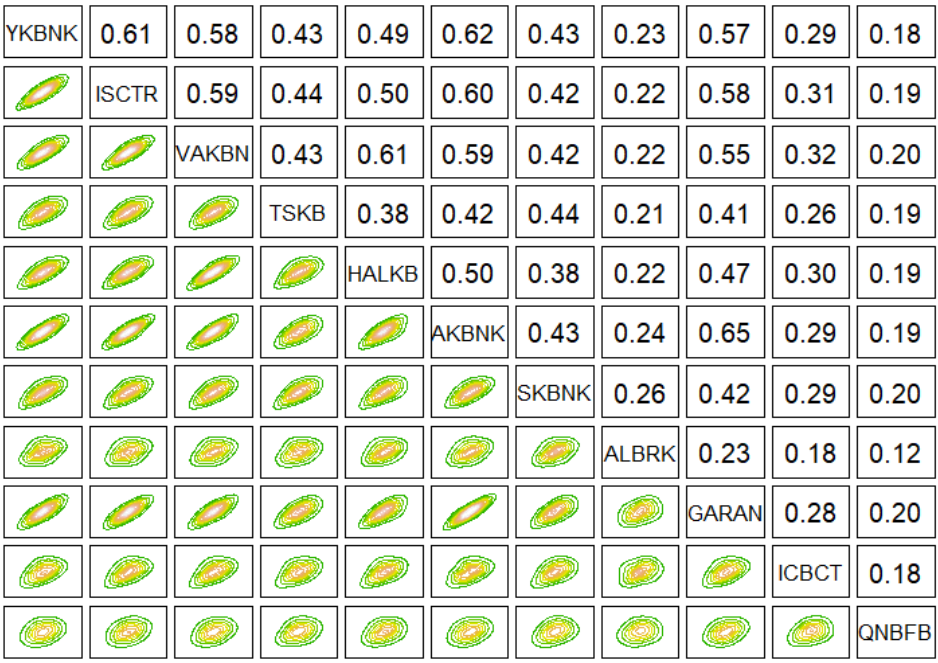
Tablo 1: Seçilen Bankacılık Hisse Senetleri için Betimleyici İstatistikler

Banka	Kod	Ortalama	Std. Sapma	Çarpıklık	Basıklık	Ljung Box p-value	ARCH Test p-value
Yapı ve Kredi Bankası	YKBNK	0.0345	1.2229	-0.4963	8.0515	0.2786	0.6306
Türkiye İş Bankası	ISCTR	0.0379	1.1949	-0.4095	8.9139	0.2409	0.9379
Türkiye Vakıflar Bankası	VAKBN	0.0067	1.2477	-0.1423	8.7390	0.6517	0.8033
Türkiye Sınai Kalkınma Bankası	TSKB	0.0370	1.3549	-0.3827	10.0029	0.4696	0.7749
Türkiye Halk Bankası	HALKB	-0.0101	1.2522	-0.4849	13.6436	0.5942	0.8459
Akbank	AKBNK	0.0141	1.2247	-0.5652	9.4011	0.3315	0.9714
Şekerbank	SKBNK	0.0235	1.3485	-0.1634	10.9556	0.2407	0.5924
Albaraka Türk Katılım Bankası	ALBRK	0.0127	4.3291	0.0350	5.3671	0.1549	0.4983
Türkiye Garanti Bankası	GARAN	0.0236	1.2043	-0.3476	9.4539	0.7099	0.7529
ICBC Turkey	ICBCT	0.0155	1.6676	-1.6960	26.0394	0.2359	0.7859
QNB Finansbank	QNBFB	0.0744	2.4467	-0.3262	16.5336	0.1650	0.4349

Şekil 1'de standartlaştırılmış ARMA(1,1)-GARCH(1,1)-t artık değerlerinin ikili kontur grafikleri (sol alt üçgen) ve Kendall'ın τ korelasyon değerleri (sağ üst üçgen) sunulmaktadır. AKBNK-GARAN ikilisi en yüksek Kendall τ katsayı değerine sahip iken, onu YKBNK-AKBNK, YKBNK-ISCTR ve ISCTR-AKBNK takip etmektedir. Ayrıca ALBRK, ICBCT ve QNBFB görece düşük Kendall τ katsayılarına sahip olup, tüm hisse senedi çiftlerinin birbiri ile pozitif korelasyona sahip olduğu görülmektedir.

Bu çalışmada, ortak dağılımlarındaki bağımlılığı yakalamak için iki değişkenli kopulalardan Gauss, Student's-t, Gumbel, Frank, Clayton, Joe, BB1, BB7, BB8 ve bunların döndürülmüş versiyonlarına izin verilmiştir. Elde edilen çıktılara göre modelde yer alan kopula aileleri **Tablo 2**'de (0: Independence, 1: Normal, 2: Student's-t, 3: Clayton, 5: Frank, 7: BB1, 14: Survival Gumbel, 16: Survival Joe, 17: Survival BB1, 20: Survival BB8 kopulasını tanımlamaktadır) verilmektedir. Matrislerin alt diyagonali, iki değişkenli kopula ailesi seçimini ve parametre tahminlerini özetlemektedir. Burada ilk göze çarpan çıktı, birçok ikili arasında tek taraflı kuyruk bağımlılığına sahip olan kopula modellerinin seçilmiş olmasıdır. Özellikle döndürülmüş Gumbel kopulası (14 numara), birçok ikili dağılım için optimal kopula olarak karşımıza çıkmaktadır. Birçok hisse senedi getiri arasında koşullu ya da koşulsuz alt kuyruk bağımlılığı bulunmaktadır. İki parametreli Student's t kopulası (2 numara) ise, Gauss kopulasının olduğundan düşük, Gumbel kopulasının olduğundan yüksek tahmin edebileceği birleşik aşağı yönlü riski isabetli bir biçimde yakalayabilmektedir. Diğer iki parametreli BB1 (7) ve survival BB1 (17) kopulaları ise Clayton ve Gumbel kopulalarının birleşiminden oluşur ve hem alt hem üst kuyruk bağımlılığına sahip verilerin modellenmesi için AKBNK, SKBNK, ALBRK için seçilen optimal kopulalar arasındadır. Seçilen kopulalar için elde edilen parametre tahminleri ve buna bağlı olarak hesaplanan alt ve üst kuyruk bağımlılıkları (λ_l, λ_u), **Tablo 3**'de özetlendiği gibidir. Artıklar arasında sadece üst kuyruk bağımlılığına sahip olan bir kopula bulunmamıştır. En yüksek alt kuyruk bağımlılığı katsayısı survival BB1 kopulasına sahip SKBNK ve QNBFB arasında 0.6476 olarak bulunmuştur. En yüksek üst kuyruk bağımlılığı ise simetrik kuyruk bağımlılığına sahip Student's t kopulasına sahip YKBNK ve QNBFB arasında 0.5553 olarak bulunmuştur. Tablolar incelendiğinde, tüm hisselerin QNBFB ile aralarında alt kuyruk bağımlılığına sahip oldukları görülmektedir.

Şekil 1. Artık Değerler Arasındaki İlişkiyi Özetleyen Bağımlılık Matrisi



Tablo 2: Artık Değerler için Kurallı Asma Kopula Matris Dağılım Aileleri

YKBNK	ISCTR	VAKBN	TSKB	HALKB	AKBNK	SKBNK	ALBRK	GARAN	ICBCT	QNBFB
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0
0	14	0	5	5	0	0	0	0	0	0
0	0	0	14	3	0	0	0	0	0	0
14	16	0	3	14	3	0	0	0	0	0
5	5	5	3	14	3	1	0	0	0	0
14	2	1	14	5	7	20	5	3	0	0
2	2	14	14	14	17	17	17	14	14	0

Tablo 3: Artık Değerler için Parametre Tahmini ve Kuyruk Bağımlılığı Matrisi

YKBNK	ISCTR	VAKBN	TSKB	HALKB	AKBNK	SKBNK	ALBRK	GARAN	ICBCT	QNBFB
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1.0465 0.0607	-	0.5118	-	-	-	-	-	-	-	-
-	1.0779 0.0977	-	0.9033	0.7224	-	-		-	-	-
-	-	-	1.0705 0.0892	0.1305 0.0049	-	-	-	-		-
1.0950 0.1167	1.0848 0.1055	-	0.1639 0.0146	1.0419 0.0550	0.0939 0.0006	-	-	-	-	-
1.3431	1.8958	0.6297	0.2128 0.0385	1.0939 0.1155	0.1262 0.0041	0.1002	-	-	-	-
1.2346 0.2468	(0.4570, 7.4550) 0.1118	0.1064	1.2549 0.2627	1.6405	(0.3543, 1.1125) 0.1723 0.1354	1.3682 0.9214	1.0115	0.2175 0.0413	-	-
(0.8489, 3.8989) 0.5553	(0.8202, 5.4156) 0.1118	1.3268 0.3139	1.8050 0.5318	1.7803 0.5240	(0.3044, 2.1675) 0.6232 0.3497	(0.2144, 2.2959) 0.6476 0.2446	(0.2400, 2.1252) 0.6144 0.2569	1.4650 0.3950	1.2263 0.2401	-

Tablo 4'de gösterilen kopula matrisi elde edilen d-1=10 ağaç yapısını özetlemek için kullanılmaktadır. **Şekil 2** ve **3**'de tahmin edilen kurallı asma kopulanın ilk iki ağacı (düzeyi) gösterilmiştir. Kopula ağaç yapısının özetini sunan **Tablo 4** incelendiğinde, ISCTR (2) sütununun en alt satırında YKBNK (1) görülürken, bu sütunun en üstünde AKBNK (6) bulunmakta ve bu iki menkul kıymetin güçlü bir bağımlılık yapısı sergilediği görülmektedir. VAKBN (3) sütununun en üst satırında ALBRK (8), en alt satırında ise SKBNK (7) yer almakta, bu durum iki farklı bankacılık türü (sırasıyla katılım ve mevduat bankası) arasındaki bağımlılığı ortaya koymaktadır. Benzer şekilde en üst satırda YKBNK (1)'nın yer aldığı altıncı sütunun en alt satırında ise ISCTR (2) yer almaktadır. Dolayısıyla bu iki menkul kıymet nispeten yüksek bir ortak bağımlılığa sahiptir. Bu ilk düğümler ve kenarlar hesaba katıldığında ikinci satır bu hisse senetlerinin bağımlılık ilişkisine göre koşullandırılır ve 2. ağaç oluşturulur. Bu çerçevede ilk sütunda en üst satırında yer alan GARAN (9)'nın, AKBNK (6) ile ilişkisi dikkate alındığında, bu sütunda sondan bir önceki giriş YKBNK (1)'dir, AKBNK (6) ile koşullandırıldığında bu iki menkul kıymet çifti arasında karşılıklı bağımlılık ilişkisi olduğunu belirtir.

Tablo 4: Kurallı Asma Kopula Matrisi Ağaç Yapısı*

YKBNK	ISCTR	VAKBN	TSKB	HALKB	AKBNK	SKBNK	ALBRK	GARAN	ICBCT	QNBFB
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	11	8	0	0	0	0	0	0	0	0
8	10	11	7	0	0	0	0	0	0	0
7	8	10	11	4	0	0	0	0	0	0
4	7	5	10	11	1	0	0	0	0	0
5	4	3	5	10	11	5	0	0	0	0
3	5	1	3	5	10	11	2	0	0	0
2	3	2	1	3	5	10	11	10	0	0
1	2	4	2	1	3	2	10	11	3	0
6	1	7	4	2	2	3	3	3	11	11

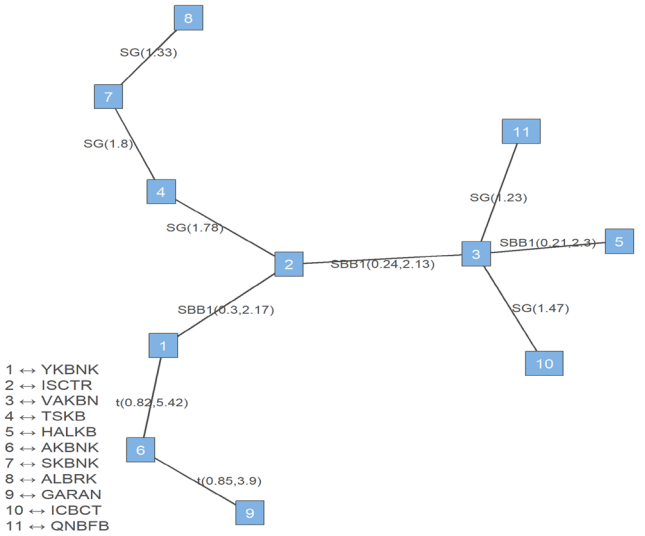
* Tablo başlık satırındaki hisse senetleri tablo içeriğinde kullanılmak üzere 1'den 11'e kadar numaralandırılmıştır.

Şekil 2'de hisse senedi getirileri üzerinde modellenen 11 boyutlu kurallı asma kopulanın ilk düzey (1. ağaç) bağımlılık yapısı görülmektedir. Ağaç 1'de üç farklı sınıflandırma yapısı dikkat çekmektedir. Endekste ağırlığı nispeten yüksek olan diğer bir deyişle yüksek piyasa değerine sahip bankalar (mevduat bankaları ISCTR, YKBNK, AKBNK, GARAN) birbiri ile bağlantılı iken, kamu sermayeli bankalar (VAKBN, HALKB) ve endekste ağırlığı nispeten küçük olan bankalar (ALBRK, SKBNK ve TSKB) birbirleriyle ayrı bir şekilde bağlantılıdır. **Şekil 3**'de ise ISCTR ve VAKBN'nin bu üç kategorinin tümü ile bağlantılı merkezi düğümler olarak ortaya çıktığı, özellikle ISCTR'nin tüm bankacılık türleri ile (katılım, kalkınma ve yatırım bankası, kamu ve özel mevduat bankaları) bağlantılı olduğu görülmektedir. Bu durum, ISCTR ve VAKBN'nin finansal bir stres durumunda daha hızlı bir toparlanma/iyileşme sağlamak için ele alınması gereken iki önemli banka olabileceğinin altını çizmektedir.

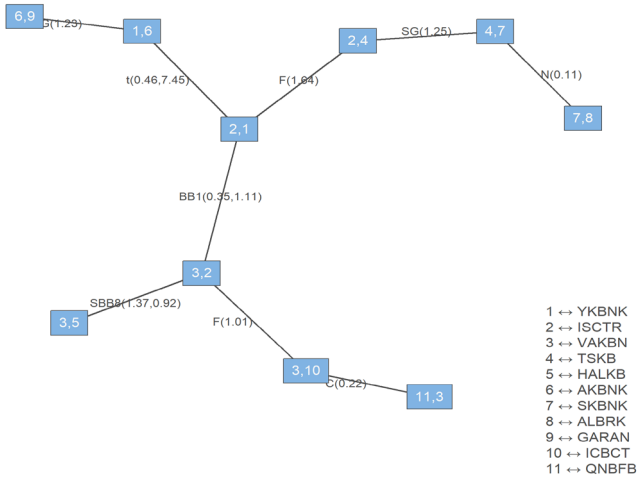
Endekste ağırlığı yüksek olan bankalar (YKBNK-AKBNK ve AKBNK-GARAN) arasındaki bağımlılık simetrik alt ve üst kuyruk bağımlılığına sahip Student's t kopulası ile modellenmiş olup, bu hem pozitif hem de negatif ekstrem olaylarda birlikte hareketi ifade etmektedir. ISCTR-VAKBN, YKBNK-ISCTR ve VAKBN-HALKB banka ikilileri arasında model tarafından seçilen kopula, iki parametreli survival BB1 (SBB1) olmuştur. Bu kopula, değişkenler arasında simetrik olmayan bağımlılığa sahiptir, bu da bağımlılığın gücünün ve yönünün verinin yapısına göre

değişebileceği anlamına gelir. Bu aile aynı zamanda dağılımın her iki kuyruğundaki bağımlılığı, diğer ifadeyle bir değişkende oluşan aşırı/orta dereceli olayların diğer değişkende aşırı/orta dereceli olaylarla da eşleştiğini gösterir.

Şekil 2. Kurallı Asma Kopula Modeli İlk Düzey Ağaç Yapısı



Şekil 3. Kurallı Asma Kopula Modeli İkinci Düzey Ağaç Yapısı



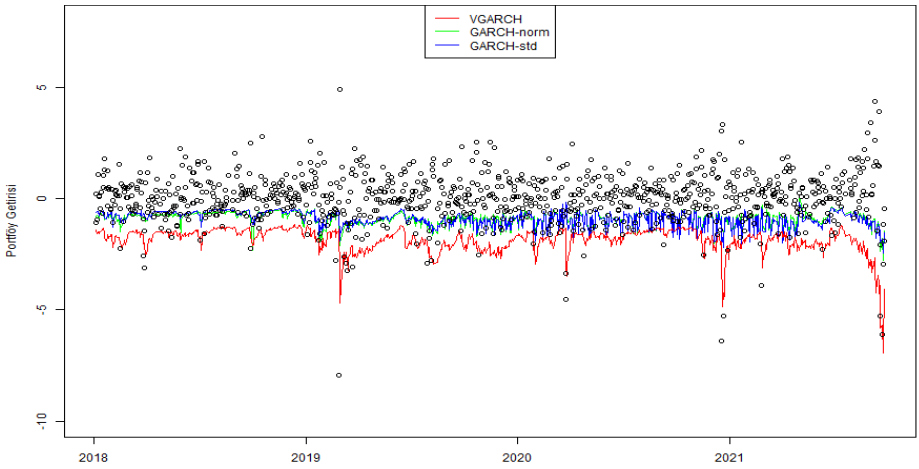
ISCTR-TSKB hisse senedi çifti için en uygun kopula ise alt kuyruk bağımlılık yapısına sahip olan survival Gumbel (SG)'dır. Bu, finansal bir stress (olumsuz bir şok) durumunda iki banka değerinin birlikte hareket etme eğiliminde olacağını göstermektedir. ALBRK-SKBNK, TSKB-SKBNK, QNBFB-VAKBN ve VAKBN-ICBCT çiftlerinin kuyruk bağımlılık ilişkisi SG ile modellenmektedir. Şekillerde görüldüğü gibi, sektör içi bağımlılık yapıları çoğu durumda asimetrik bir copula olan SG kopulası ile modellenmektedir. Bu sonuç, Asya hisse senedi endekslerinin asimetrik kopulalar tarafından daha iyi modelleneceğini ileri süren Heinen ve Valdesogo (2010)'nun ve iki hisse senedi endeksinin asimetrik bağımlılık yapısını tanımlamada döndürülmüş Gumbel kopulasının, normal ve Student's t kopulalarından avantajlı olduğunu gösteren Patton (2004)'un bulguları ile örtüşmektedir.

4.2. Portföy Analizi

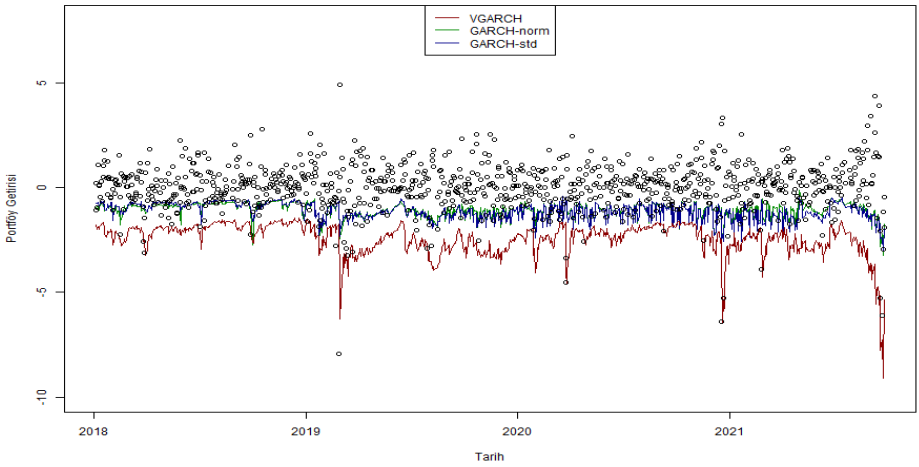
Çalışmanın ikinci bölümünde, ilk bölümde elde edilen artık değerler için, hareketli pencere yaklaşımı ile dinamik bir şekilde bir gün sonrasını tahmin eden kurallı asma kopula modeli kullanılmıştır. Portföy, çalışmada kullanılan banka hisse senetlerinin eşit ağırlıklandırılması ile oluşturulmuştur. Seçilen 250 günlük pencere genişliğine göre, her hareketli pencerede değişen asma kopula modeli yardımıyla, bir gün sonrasında elde edilen hisse senedi getirisi değeri tahmin edilmiştir. Her bir hareketli pencere dönemi için, yeni bir kurallı asma kopula modeli elde edilerek, bağımlılık yapısının daha dinamik olarak ele alınması amaçlanmıştır. Önerilen modelin çıktılarının karşılaştırılması adına, literatürde sıklıkla kullanılan GARCH(1,1) temelli iki farklı yaklaşım daha incelenmiştir. Buna göre kurallı asma kopula temelli model (VGARCH), GARCH tabanlı ve normal dağılıma sahip model (GARCH-norm) ve GARCH tabanlı ve Student's t dağılıma sahip model (GARCH-std) tahminleri hem grafiksel olarak hem de geriye dönük testlerle karşılaştırılmıştır. Tahmin edilen Portföy getirilerinden %95 güven seviyesi kullanılarak hesaplanan VaR ve ES değerleri, 3 farklı model için, portföy getirileri ile beraber (siyah noktalar) **Şekil 4** ve **5**'de gösterilmektedir. Her iki risk ölçütü için, VGARCH modelinin portföye ait kayıpları yakalamada daha başarılı olduğu görülmektedir. Genel olarak GARCH-norm ve GARCH-std tahmin sonuçları birbirine çok yakın hareket etmektedir. Kurallı asma kopula yaklaşımı ile elde edilen sonuçlar mutlak

değer olarak daha yüksek olmakla birlikte, karar vericiler açısından daha hassas ve istenen düzeyde risk ölçümüne imkân sunmaktadır.

Şekil 4. Eşit Ağırlıklı Portföy için Elde Edilen VaR Değerleri



Şekil 5. Eşit Ağırlıklı Portföy için Elde Edilen ES Değerleri



Elde edilen model çıktılarını, geriye dönük testler yardımıyla da karşılaştırmak mümkündür. **Tablo 5** ve **6**'da görülen test sonuçları, 250 günlük hareketli pencere yaklaşımı ve 0,05 anlamlılık düzeyi baz alındığında beklenen ihlal sayısı 46 olarak bulunmaktadır. Geriye dönük testler de elde edilen risk ölçütü değerleri için,

yukarıda tespit edilen bulguları destekler niteliktedir. **Tablo 5**'de yer alan VaR test sonuçlarına göre, VGARCH modeli beklenen ve gerçek ihlal değerleri açısından iyi bir performans göstermektedir. **Tablo 6**'da ES test değerleri için de aynı sonuç elde edilmiştir. Sıfır hipotezinin reddedilmemiş olması, VGARCH modelinin performansının diğer yöntemlere göre daha başarılı olduğunu ve hesaplanan risk ölçütlerinin gerçek veride karşılaşılan artış ve azalışları yakalamada etkinlik gösterdiğini ifade etmektedir.

Tablo 5: VaR Test Sonuçları

	Aşım Sayısı		LR	IND
Model	**Beklenen**	**Gerçekleşen**	**p-değeri**	**p-değeri**
GARCH-norm	46	126	0.00000	0.00000
GARCH-std	46	131	0.00000	0.00000
VGARCH	46	32	0.02071	0.06851*

* 0.05 anlamlılık düzeyinde reddedilmedi.

Tablo 6: ES Test Sonuçları

	ES Test
Model	**p-değeri**
GARCH-norm	0.00000
GARCH-std	0.00000
VGARCH	0.08107*

* 0.05 anlamlılık düzeyinde reddedilmedi.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada portföyün bağımlılık yapısını etkin bir şekilde ölçebilen, finansal getiri verilerinde gözlemlenen çarpıklık ve basıklığı dikkate alan dinamik asma kopula modelinin literatürdeki yöntemlerle karşılaştırmalı olarak incelenmesi Türkiye verisi kullanılarak sağlanmıştır. Bu doğrultuda, kurallı asma kopula modelinin etkileri iki aşamada araştırılmıştır. İlk bölümde, Türk bankacılık sektörüne ait 03.01.2018 ile 22.09.2022 tarihleri arasında 11 farklı hisse senedi getirisi arasındaki bağımlılık yapısı incelenmiştir. İkinci bölümde ise, hareketli pencere ve kurallı asma kopula yaklaşımı birlikte kullanılarak portföy getiri riski için VaR ve ES risk ölçütleri elde edilmiştir. Belirlenen tarih aralığı ve BIST100

içerisinde bankacılık sektörüne odaklanması açısından çalışmanın bulguları önemlidir. Bağımlılık yapısı açısından, yüksek piyasa değerine sahip bankalar (YKBNK, AKBNK, GARAN) simetrik bir kuyruk bağımlılık yapısı sergilerken, göreceli olarak daha küçük piyasa değerine sahip bankalar (ALBRK, SKBNK, TSKB, ICBCT) genel olarak alt kuyruk bağımlılığı göstermektedir. Kurallı asma kopula modelinin ağaç yapısı, ISCTR ve VAKBN'nin birbirine bağlı merkezi düğümler olduğunu göstermiştir.

Genel olarak, en sık optimal seçilen kopulalar alt kuyruk bağımlılığına sahip Clayton ve SG'dir. İkili gruplar arasında kurulan farklı kuyruk bağımlılıkları, karar vericiler açısından istenilen düzeyde riske sahip olan portföyler oluşturabilme noktasında önem arz etmektedir. İncelenen tarih aralığı düşünüldüğünde, ana bulgular, durağan olmayan koşullar altında bankacılık sektöründe hisse senetleri arasındaki yüksek bağımlılık riskini göstermektedir. Risk ölçütleri ile test edilen Türkiye bankacılık sektörü eşit ağırlıklı portföy performansı kurallı asma kopula tabanlı GARCH yöntemi ile literatürdeki çalışmalari destekler biçimde daha iyi tahmin sonuçları vermektedir.

Elde edilen bulgular, Türk bankacılık sektöründeki bağımlılık yapısını göstermektedir. Bu model geliştirilerek gelişmekte olan piyasalar için bağımlılık analizinin finansal stres dönemlerinde, özellikle 2001 bankacılık krizi ve 2008 global finansal krizi gibi, incelenmesi sağlanabilir. Yapısal değişim analizi ile zaman serilerinde olası gerçekleşmiş anlamlı kırılım tarihleri belirlenerek, her bir alt zaman aralığı kendi içerisinde modellenebilir. Kurallı asma kopula metodları geliştirilmeye açık bir konu olmaya devam etmektedir ve bankacılık sektörüne etkisi olabilecek temel ekonomik göstergeler (ör. döviz kurları ve likidite koşulları) bu kapsamda analize dahil edilebilir. Volatilite için ARMA-GARCH yanı sıra VGARCH, TGARCH, EGARCH, GARCH-RV ve volatilite zıplamalarının da göz önünde bulundurulduğu farklı tip modeller marjinal seriler için test edilip karşılaştırılabilir ve böylece kopula modeli belirlenme aşaması daha etkin bir şekilde sağlanabilir. Aynı zamanda, model lag değerlerinin seçimi her bir kayan pencere için yinelenebilir ve böylece bağımlılık yapısının açıklanmasına katkı sağlanabilir. Eşit ağırlıklı portföy yerine farklı ağırlıklara sahip optimum portföy oluşturulması için daha kapsamlı bir

çalışma yapılabilir. Yukarıda kısaca bahsedilen ileriye dönük olası çalışma fikirleri yazarların planları arasındadır.

Etik Komite Onayı: Etik kurul onayı gerekmemektedir.
Hakem Değerlendirmesi: Dış bağımsız.
Yazar Katkıları: Çalışma Konsepti/Tasarım- B.Y.K., G.P., İ.G., O.E.; Veri Toplama – B.Y.K., İ.G.; Veri Analizi/Yorumlama- B.Y.K., G.P., O.E.; Yazı Taslağı- B.Y.K., G.P., İ.G., O.E.; İçeriğin Eleştirel İncelemesi- B.Y.K., G.P., O.E.; Son Onay ve Sorumluluk- B.Y.K., G.P., O.E.
Çıkar Çatışması: Yazarlar çıkar çatışması bildirmemiştir.
Finansal Destek: Yazarlar bu çalışma için finansal destek almadığını beyan etmiştir.

Ethics Committee Approval: N/A.
Peer-review: Externally peer-reviewed.
Author Contributions: Conception/Design of Study- B.Y.K., G.P., O.E.; Data Acquisition- B.Y.K., İ.G.; Data Analysis/Interpretation- B.Y.K., G.P., O.E.; Drafting Manuscript- B.Y.K., G.P., İ.G., O.E.; Critical Revision of Manuscript- B.Y.K., G.P., O.E.; Final Approval and Accountability- B.Y.K., G.P., O.E.
Conflict of Interest: The authors have no conflict of interest to declare.
Grant Support: The authors declared that this study has received no financial support.

Kaynaklar/References

Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., & Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, *44*(2), 182-198.

Allen, D. E., Ashraf, M. A., McAleer, M., Powell, R. J., & Singh, A. K. (2013). Financial dependence analysis: applications of vine copulas. *Statistica Neerlandica*, *67*(4), 403-435.

Aloui, R., Aïssa, M. S. B., & Nguyen, D. K. (2013). Conditional dependence structure between oil prices and exchange rates: a copula-GARCH approach. *Journal of International Money and Finance*, *32*, 719-738.

Bedford, T., & Cooke, R. M. (2001). Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Annals of Mathematics and Artificial intelligence*, *32*(1), 245-268.

Bedford, T., & Cooke, R. M. (2002). Vines a new graphical model for dependent random variables. *The Annals of Statistics,* 30, 1031–1068. https://doi.org/10.1214/AOS/1031689016

Binici, M., Köksal, B., & Orman, C. (2013). Stock return comovement and systemic risk in the Turkish banking system. *Central Bank Review*, *13*.

Brechmann, E., & Czado, C. (2013). Risk management with high-dimensional vine copulas: An analysis of the Euro Stoxx 50. *Statistics & Risk Modeling*, *30*(4), 307-342. https://doi.org/10.1524/strm.2013.2002

Christoffersen, P., Hahn, J., & Inoue, A. (2001). Testing and comparing value-at-risk measures. *Journal of Empirical Finance*, *8*(3), 325-342.

Czado, C. (2019). Analyzing dependent data with vine copulas. *Lecture Notes in Statistics, Springer*, *222*.

Çamlıca, F., Güneş, D., & Özen, E. (2017). *A financial connectedness analysis for Turkey* (No. 1719).

Dißmann, J. F. (2010). *Statistical inference for regular vines and application,* Technische Universität München, Retrieved from: https://mediatum.ub.tum.de/doc/1079308/file.pdf

Dißmann, J., Brechmann, E. C., Czado, C., & Kurowicka, D. (2013). Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. *Computational Statistics & Data Analysis*, *59*, 52-69.

Geidosch, M., & Fischer, M. (2016). Application of vine copulas to credit portfolio risk modeling. *Journal of Risk and Financial Management*, *9*(2), 4.

Hernandez, J.A. (2015). *Vine copula modelling of dependence and portfolio optimization with application to mining and energy stock return series from the Australian market* (Doctoral dissertation). Retrieved from: https://ro.ecu.edu.au/theses/1693/

Joe, H. (1996). Families of m-variate distributions with given margins and m(m-1)/2 bivariate dependence parameters. *Lecture notes-monograph series*, 120-141.

Joe, H. (1997). *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC press.

Joe, H., Cooke, R. M., & Kurowicka, D. (2010). Regular vines: generation algorithm and number of equivalence classes. In D. Kurowicka & H. Joe (Eds.), *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook* (pp. 219-231). World Scientific Publishing Co., Singapore.

Kupiec, P. H. (1995). *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models* (Vol. 95, No. 24). Division of Research and Statistics, Division of Monetary Affairs, Federal Reserve Board.

Kurowicka, D., & Cooke, R. M. (2006). *Uncertainty analysis with high dimensional dependence modelling*. John Wiley & Sons.

Heinen, A., & Valdesogo, A. (2010). Dynamic d-vine model. In D. Kurowicka & H. Joe (Eds.), *Dependence Modeling: Vine Copula Handbook* (pp. 329-353). World Scientific Publishing Co., Singapore.

Li, D. X. (2000). On default correlation: A copula function approach. *The Journal of Fixed Income*, *9*(4), 43-54.

Maugis, P. A., & Guegan, D. (2010) An econometric study of vine copulas. *International Journal of Economics and Finance*, 2, 1-13.

McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of Empirical Finance*, *7*(3-4), 271-300.

Mensah, P. O., & Adam, A. M. (2020). Copula-based assessment of co-movement and tail dependence structure among major trading foreign currencies in Ghana. *Risks*, *8*(2), 55.

Min, A., & Czado, C. (2010). Bayesian inference for multivariate copulas using pair-copula constructions. *Journal of Financial Econometrics*, *8*(4), 511-546.

Nagler, T., Schepsmeier, U., Stoeber, J., Brechmann, E. C., Graeler, B., & Erhardt. (2022). T. VineCopula: Statistical Inference of Vine Copulas. R package version 2.4.4 https://CRAN.R-project.org/package=VineCopula

Nelsen, R. B. (2007). *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media.

Özgür, C., & Sarıkovanlık, V. (2021). An application of Regular Vine copula in portfolio risk forecasting: evidence from Istanbul stock exchange. *Quantitative Finance and Economics*, *5*(3), 452-470.

Pastpipatkul, P., Yamaka, W., & Sriboonchitta, S. (2018). Portfolio selection with stock, gold and bond in Thailand under vine Copulas functions. In *International Econometric Conference of Vietnam* (pp. 698-711). Springer, Cham.

Patton, A. J. (2004). On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation. *Journal of Financial Econometrics*, *2*(1), 130-168.

Patton, A. J. (2008). Copula-based Models for Financial Time Series. *OFRC Working Papers Series, Oxford Financial Research Centre.*

Patton, A. (2013). Copula methods for forecasting multivariate time series. *Handbook of Economic Forecasting*, *2*, 899-960.

Pourkhanali, A., Kim, J. M., Tafakori, L., & Fard, F. A. (2016). Measuring systemic risk using vine-copula. *Economic Modelling*, *53*, 63-74.

Reboredo, J. C., & Ugolini, A. (2016). Systemic risk of Spanish listed banks: a vine copula CoVaR approach. *Spanish Journal of Finance and Accounting/Revista Española de Financiación y Contabilidad*, *45*(1), 1-31.

Rockinger, M., & Jondeau, E. (2001). Conditional dependency of financial series: An application of copulas.

Sklar, M. (1959). Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. univ. Paris*, *8*, 229-231.

Şengül, S., & Yılmaz, E. (2019). Measuring Systemic Risks in the Turkish Banking Sector 1. *Business and Economics Research Journal*, *10*(5), 1071-1084.

Talaslı, I. (2013). Systemic risk analysis of Turkish financial institutions with systemic expected shortfall. *Central Bank Review*, *13*(3), 25-40.

Xia, X. (2018). *Essays on Dependence Modelling with Vine Copulas and its Applications* (Doctoral dissertation, University of Leicester).

Zeevi, A., & Mashal, R. (2002). Beyond correlation: Extreme co-movements between financial assets. *Available at SSRN 317122*.

Zhang, J. (2015). *Systemic risk measure: CoVaR and Copula* (Master Thesis). Retrieved from: https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/14892/zhang.pdf?sequence=1

Zhang, D., Yan, M., & Tsopanakis, A. (2018). Financial stress relationships among Euro area countries: an R-vine copula approach. *The European Journal of Finance*, *24*(17), 1587-1608.

Zhang, L., & Singh, V. P. (2019). *Copulas and their applications in water resources engineering*. Cambridge University Press.